
А.Б.Заблоцкий
« 12 » ноября 2022 г.

ЗАДАНИЯ
для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 26 ноября 2022 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

XI класс

1. Доказать неравенство:

$$(1 + \log_2 3)(1 + \log_3 4)(1 + \log_4 5) \dots (1 + \log_{2022} 2023) > 2^{2022}$$

2. Точки A и B лежат на графике функции $y = x^2$ так, что отрезок AB параллелен оси абсцисс. Через точки A и B к параболе проведены касательные, которые пересекаются в точке C . Окружность, описанная около треугольника ABC , пересекает ось ординат в точке E . Найти расстояние от точки E до прямой AB .

3. Найти наибольший корень уравнения $1050 \cdot \{x\} = 50 \cdot [x] \cdot \{x\} + [x] - 9$.

Примечание.

$[x]$ – это наибольшее целое число, не превосходящее x .

$\{x\}$ называется *целой частью числа* x .

Например, $[5,2] = 5$, $[7] = 7$, $[-3,1] = -4$.

$\{x\} = x - [x]$, $\{x\}$ – называется *дробной частью числа* x .

Например, $\{5,2\} = 0,2$, $\{7\} = 0$, $\{-3,1\} = 0,9$.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) пересекаются в точке O . Окружность w_1 , проходящая через точки O и A , касается стороны AD в точке A . Окружность w_2 , проходящая через точки O и D , касается стороны AD в точке D . Продолжения сторон AB и DC пересекаются в точке M . Окружность w_1 пересекает отрезок AM в точке P . Окружность w_2 пересекает отрезок DM в точке Q . Доказать, что около четырехугольника $APQD$ можно описать окружность.

5. Вокруг Белоснежки стоят 7 гномов. У Белоснежки имеются колпаки трех цветов: белого, синего и красного (имеется достаточное количество колпаков каждого цвета). На голову каждого гнома Белоснежка надевает один из колпаков. Сколькими способами Белоснежка может надеть колпаки на головы всем семи гномам так, чтобы на головах любых двух гномов, стоящих рядом, были колпаки разного цвета? (Гномы стоят по кругу, у каждого гнома есть два соседа).

1. **Решение:**

Согласно неравенству Коши, имеем:

$$1 + \log_2 3 > 2\sqrt{\log_2 3}, \quad 1 + \log_3 4 > 2\sqrt{\log_3 4}, \quad 1 + \log_4 5 > 2\sqrt{\log_4 5}, \quad \dots$$

$1 + \log_{2022} 2023 > 2\sqrt{\log_{2022} 2023}$ (все неравенства строгие, поскольку в левой части каждого неравенства слагаемые не равны).

Перемножим данные неравенства (их количество равно 2021)

$$(1 + \log_2 3)(1 + \log_3 4)(1 + \log_4 5) \dots (1 + \log_{2022} 2023)$$

$$> 2^{2021} \cdot \sqrt{\log_2 3 \cdot \log_3 4 \dots \log_{2022} 2023} =$$

$$= 2^{2021} \cdot \sqrt{\log_2 2023 \cdot \log_3 3 \cdot \log_4 4 \dots \log_{2022} 2022} = 2^{2021} \cdot \sqrt{\log_2 2023}.$$

Итак,

$$(1 + \log_2 3)(1 + \log_3 4)(1 + \log_4 5) \dots (1 + \log_{2022} 2023) > 2^{2021} \cdot \sqrt{\log_2 2023}.$$

Заметим, что $\log_2 2023 > 10$, тогда $\sqrt{\log_2 2023} > \sqrt{10} > 2$.

$$\text{Тогда } 2^{2021} \cdot \sqrt{\log_2 2023} > 2^{2021} \cdot 2 = 2^{2022}.$$

Что требовалось доказать.

2. **Решение:**

Пусть точки A и B имеют координаты: $A(-a; a^2)$, $B(a; a^2)$, где $a > 0$. Пусть $D(0; a^2)$ – точка пересечения отрезка AB с осью ординат.

Касательные к параболе $y = x^2$ в точках A и B соответственно имеют вид:

$$y = a^2 - 2a(x + a), \quad y = a^2 + 2a(x - a).$$

$$\text{Или после упрощения: } y = -2ax - a^2, \quad y = 2ax - a^2.$$

Легко видеть, что обе прямые пересекают ось ординат в точке $(0; -a^2)$, т.е. точка C имеет координаты: $C(0; -a^2)$.

По свойству пересекающихся хорд имеем:

$$AD \cdot DB = ED \cdot DC.$$

$$AD = DB = a, \quad DC = DO + OC = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

$$\text{Тогда } a \cdot a = ED \cdot 2a^2, \text{ откуда } ED = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}.$$

3. **Решение:**

Заметим, что $x = [x] + \{x\}$. Выполним преобразования:

$$1050 \cdot \{x\} = 50 \cdot [x] \cdot \{x\} + [x] - 9;$$

$$1050 \cdot \{x\} - 50 \cdot [x] \cdot \{x\} - [x] + 9 = 0;$$

$$50\{x\}(21 - [x]) - [x] + 9 = 0;$$

$$50\{x\}(21 - [x]) - [x] + 21 - 12 = 0;$$

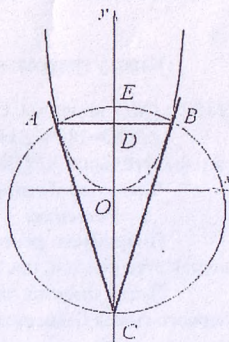
$$50\{x\}(21 - [x]) + (21 - [x]) - 12 = 0;$$

$$(21 - [x])(50\{x\} + 1) = 12. \quad (1)$$

Поскольку $\{x\} \geq 0$, то $50\{x\} + 1 > 0$. Но тогда и $21 - [x] > 0$. Откуда $[x] < 21$. По условию требуется найти наибольший корень уравнения, поэтому нас интересует только наибольшее возможное значение $[x]$, т.е. $[x] = 20$. Подставив это значение в (1) получим:

$$(21 - 20)(50\{x\} + 1) = 12;$$

$$50\{x\} = 11;$$



$$\{x\} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = 0,22.$$

Наибольший корень уравнения: $x=20+0,22=20,22$.

Ответ: 20,22.

4. Решение:

Пусть окружности π_1 и π_2 пересекаются в точках O и T . (Если окружности π_1 и π_2 касаются, то точки O и T совпадают и в этом случае задача решается аналогично). Пусть точка K – точка пересечения прямых TO и AD . Докажем, что K – середина стороны AD .

По свойству касательной и секущей имеем:

$$KO \cdot KT = KA^2, KO \cdot KT = KD^2.$$

$$\text{Откуда } KA^2 = KD^2, KA = KD.$$

По известному свойству трапеции, середины оснований, точки пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. Это означает, что точки K, O, T и M лежат на одной прямой.

Далее, по свойству секущих, имеем: $MP \cdot MA = MT \cdot MO, MQ \cdot MD = MT \cdot MO$.

$$\text{Отсюда } MP \cdot MA = MQ \cdot MD, \text{ и } \frac{MP}{MQ} = \frac{MD}{MA}.$$

Итак, у треугольников AMD и QMP угол M – общий и $\frac{MP}{MQ} = \frac{MD}{MA}$. Значит, треугольники

AMD и QMP подобны. Отсюда следует равенство углов MAD и MQP .

$\angle PQD = 180^\circ - \angle MQP = 180^\circ - \angle PAD$, т.е. $\angle PQD + \angle PAD = 180^\circ$. Это означает, что четырехугольник $APQD$ – вписанный.

Что и требовалось доказать.

5. Решение:

Попробуем решить задачу для меньшего числа гномов. Последовательно увеличивая количество гномов, постараемся обнаружить закономерность.

Пусть имеется только 2 гнома. По отношению друг к другу они являются соседями. На первого гнома Белоснежка может надеть колпак одного из трех цветов, на второго – колпак одного из двух оставшихся цветов. Итого число способов равно $3 \cdot 2 = 6$.

Пусть имеется 3 гнома. На первого гнома Белоснежка может надеть колпак одного из трех цветов, на второго – колпак одного из двух оставшихся цветов. На третьего придется надеть колпак оставшегося цвета. Итого число способов равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Пусть имеется 4 гнома. На первого гнома Белоснежка может надеть колпак одного из трех цветов. Пусть это будет белый цвет (обозначим этого гнома через B , см. рисунок). Рассмотрим гнома, стоящего через одного от B . Обозначим его буквой X .

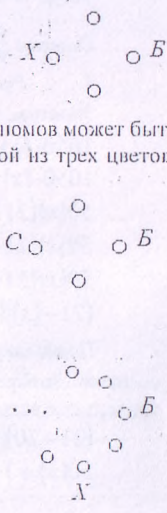
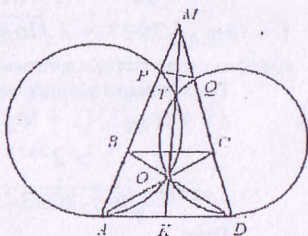
Если на гноме X колпак белого цвета, то на каждого из двух оставшихся гномов может быть колпак одного из двух цветов. Тогда, учитывая, что вместо B может быть любой из трех цветов, число способов будет $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Если на гноме X колпак не белого, а например, синего цвета (см. рис.). Тогда на каждого из двух оставшихся гномов может быть колпак только красного цвета. Тогда, учитывая, что вместо B может быть любой из трех цветов, а вместо C – любой из двух оставшихся, число способов будет $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Всего для четырех гномов число способов будет равно $12+6=18$.

Пусть имеется n гномов. Количество способов, которыми Белоснежка может надеть на них колпаки обозначим через $S(n)$. Ранее было выяснено $S(2)=6, S(3)=6, S(4)=18$.

На первого гнома Белоснежка может надеть колпак одного из трех цветов. Пусть это будет белый цвет (обозначим этого гнома через B , см. рисунок). Рассмотрим гнома, стоящего через одного от B . Обозначим его буквой X .



надет колпак одного из двух цветов. Тогда число способов, которыми Белоснежка может надеть колпаки на n гномов равно удвоенному числу способов, которыми она может надеть колпаки на $n-2$ гномов.

Если на гноме X колпак не белого, а например, синего цвета. Тогда на каждого из двух оставшихся гномов может быть колпак только красного цвета. Тогда число способов, которыми Белоснежка может надеть колпаки на n гномов равно числу способов, которыми она может надеть колпаки на $n-1$ гнома.

Итак, $S(n) = S(n-1) + 2S(n-2)$, где $n > 2$.

$S(2) = 6$, $S(3) = 6$. Далее, имеем: $S(4) = S(3) + 2S(2) = 6 + 2 \cdot 6 = 18$.

$S(5) = S(4) + 2S(3) = 18 + 2 \cdot 6 = 30$. $S(6) = S(5) + 2S(4) = 30 + 2 \cdot 18 = 66$.

$S(7) = S(6) + 2S(5) = 66 + 2 \cdot 30 = 126$.

Ответ: 126 способов.